

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2014 – 2015 учебном году
10 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

20	14	

К решению
задачи 10.1
внимательно

10.1. Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В магическом квадрате 3×3 известны только два числа из девяти — см. рисунок.

- а) Приведите пример такого магического квадрата.
б) Однозначно ли определяется магический квадрат по условиям задачи?

в) Можно ли наверняка определить ещё хотя бы одно число квадрата?
Ответы обосновать.

a	$b-a+14$	$a+b$
20	14	$a+b-14$
b	$a-b+14$	$b+6$

К решению
задачи 10.1

Решение: Рассмотрим произвольный магический квадрат, удовлетворяющий условию задачи. Обозначим число, стоящее в левом верхнем углу, через a , в левом нижнем — через b . Тогда сумма чисел в первом столбце (она же сумма чисел в любом другом столбце, строке или диагонали) — магическая сумма — равна $a + b + 20$. Посмотрев на получающиеся суммы в средней строке и на двух диагоналях, получим, что в правом столбце получатся числа (сверху вниз) $6 + a$, $a + b - 14$ и $6 + b$. Теперь из первой и третьей строк найдём,

что во втором столбце сверху стоит $b - a + 14$, а снизу $a - b + 14$ — см. рисунок. Заметим, что при любых a и b теперь суммы по всем горизонталям, первому столбцу и обеим диагоналям равны $a + b + 20$, а по второму и третьему столбцу соответственно равны 42 и $2a + 2b - 2$. Чтобы квадрат был магическим, необходимо и достаточно выполнения двойного равенства $a + b + 20 = 42 = 2a + 2b - 2$. Легко увидеть, что первое равенство равносильно второму, поэтому условие на самом деле одно: $a + b = 22$.

Теперь ответы на все вопросы задачи очевидны. Для приведения примера (пункт «а») достаточно выбрать в качестве a и b любые числа, дающие в сумме 22 , например, $a = 2$, $b = 20$ или $a = 11 + 2\sqrt{3}$ и $b = 11 - 2\sqrt{3}$. Два таких примера дадут отрицательный ответ на вопрос пункта «б». Для ответа на вопрос пункта «в» достаточно заметить, что третье число второй строки равно $a + b - 14 = 22 - 14 = 8$ и от a и b не зависит.

Примечание 1: Можно получить общий вид магического квадрата, как функцию от одной переменной, например, через переменную a . Для этого надо исключить вторую переменную, то есть заменить всюду b на $22 - a$. Полученный квадрат изображён на рисунке.

a	$36-2a$	$a+6$
20	14	8
$22-a$	$2a-8$	$28-a$

К решению
задачи 10.1

Примечание 2: Вместо a и b можно было ввести какие-нибудь две другие неизвестные, например, взять за одну из неизвестных магическую сумму, за вторую — число в середине верхней строки. Общий вид допустимых квадратов при этом может измениться, но не сильно: правильной заменой переменной квадрат можно будет свести к изображённому на рисунке. И, конечно, во всех случаях третье число второй строки будет 8.

Примечание 3: Конкретные магические квадраты получатся, если единственной оставшейся переменной присвоить любое значение. Если общий вид квадрата получен, то можно считать, что получены ответы на все три пункта задачи.

Ответ: а) Годится любой квадрат типа приведённого на втором рисунке. б) Не однозначно. в) Можно определить третье число второй строки (и только его) — это число 8.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ на все пункты (а), (б), (в) или получен общий вид всех допустимых магических квадратов	7 баллов
приведён один пример и доказано, что третье число второй строки определено условиями однозначно	5 баллов
приведены хотя бы два верных примера (верно решены пункты (а) и (б)) или доказано, что третье число второй строки определено однозначно	3 балла
приведён только один верный пример, то есть решён только пункт (а)	1 балл

10.2. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/час, сохраняя дистанцию между собой в 45 метров. Минувя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/час. Каким после этого будет расстояние между машинами? Ответ обосновать.

Решение:

Способ 1. Рассмотрим двух неподвижных наблюдателей: один стоит до знака ограничения скорости, второй — после. Расстояние между наблюдателями каждая машина прошла по одному и тому же графику, значит, за одно и то же время. Значит, интервал времени между машинами один и тот же для каждого из наблюдателей. Для первого он равен $\frac{45 \cdot 10^{-3}}{90}$, для второго $\frac{x}{50}$, где x — искомое расстояние между машинами (в километрах). Отсюда $x = 25 \cdot 10^{-3}$ км = 25 м.

Способ 2. В момент, когда первая машина проехала знак ограничения скорости, вторая находилась на расстоянии 45 метров до этого знака. Это расстояние она

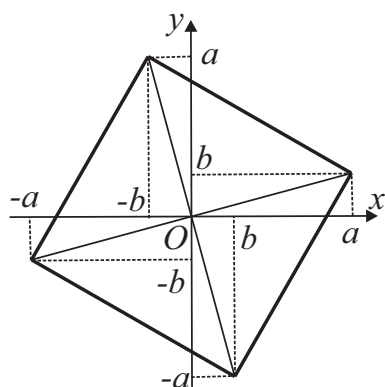
преодолела за время $t = \frac{45 \cdot 10^{-3}}{90} = 5 \cdot 10^{-4}$ ч. Первая машина за это время отъехала от знака на расстояние $50t$ км, то есть на $25 \cdot 10^{-3}$ км. Это и есть новое расстояние между машинами.

Ответ: 25 метров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ	7 баллов
полученный ответ неверен исключительно из-за арифметических ошибок	6 баллов
задача не решена, но имеется указание того, что временной интервал между машинами всегда одинаков	3 балла
верный ответ без обоснования	1 балл

10.3. Каждой точке координатной плоскости xOy поставим в соответствие произведение ее координат, которое назовем весом точки. Докажите, что сумма весов всех четырех вершин квадрата одна и та же для любых двух квадратов с общим центром.



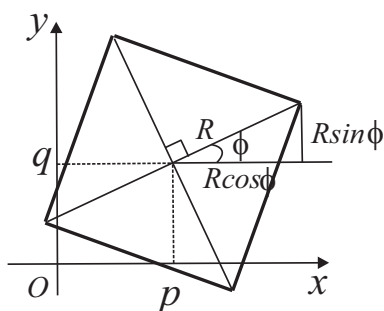
Решение:

Способ 1. Докажем сначала утверждение задачи для квадратов, центры которых совпадают с началом координат. Если диагонали совпадают с осями, то все веса вершин равны нулю, нулю равна и их сумма. Пусть диагонали квадрата с осями не совпадают. Тогда в каждой из координатных четвертей находится ровно одна вершина. Пусть координаты вершины, находящейся в первой четверти, равны $(a; b)$ (см. рисунок). Тогда из равенства прямоугольных треугольников вида O —

к решению задачи 10.3,
первый способ

вершина квадрата — проекция этой вершины на ближайшую к ней ось координат легко находятся координаты трёх других вершин: $(b; -a)$, $(-a; -b)$ и $(-b; a)$, если идти по часовой стрелке. Сумма весов вершин равна $ab - ab + ab - ab = 0$. Случай, когда центр квадрата совпадает с началом координат, разобран.

Теперь пусть центр квадрата находится в точке с координатами $(p; q)$. Рассмотрим квадрат, полученный из исходного параллельным переносом на вектор $\{-p; -q\}$. Центр этого нового квадрата совпадёт с началом координат, а координаты новых вершин будут $(a; b)$, $(b; -a)$, $(-a; -b)$ и $(-b; a)$ для некоторых чисел a и b . Тогда координаты исходного квадрата равны $(a + p; b + q)$, $(b + p; -a + q)$, $(-a + p; -b + q)$ и $(-b + p; a + q)$. Подсчитаем сумму весов: $(a + p)(b + q) + (b + p)(-a + q) + (-a + p)(-b + q) + (-b + p)(a + q) = 4pq$. Таким образом, указанная сумма не зависит от вершин квадрата, а только от координат его центра.



к решению задачи 10.3,
второй способ

Способ 2. Пусть центр квадрата находится в точке с координатами $(p; q)$. Пусть, кроме того, R — радиус описанной около квадрата окружности, φ — угол между одной из диагоналей квадрата и осью абсцисс ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$). Тогда угол между второй диагональю и осью абсцисс равен $\varphi + 90^\circ$. Концы первой диагонали будут иметь координаты $(p + R \cos \varphi; q + R \sin \varphi)$ и $(p - R \cos \varphi; q - R \sin \varphi)$ — здесь мы предположили без ограничения общности, что первой диагональю является та, которая идёт вправо-вверх. Сумма их весов будет равна

$$(p + R \cos \varphi)(q + R \sin \varphi) + (p - R \cos \varphi)(q - R \sin \varphi) = 2pq + 2R^2 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Аналогично, сумма весов концов второй диагонали равна

$$2pq - 2R^2 \cos(\varphi + 90^\circ) \sin(\varphi + 90^\circ) = 2pq - 2R^2 \cos \varphi \sin \varphi.$$

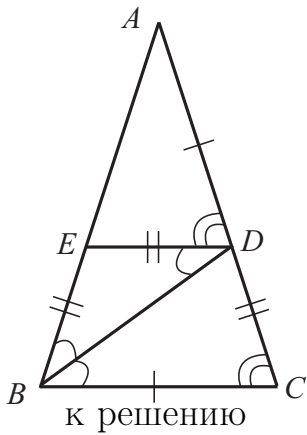
А сумма весов всех четырёх вершин будет равна $4pq$, то есть будет одинаковой для всех квадратов с указанным центром.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
верно записаны (через параметры) координаты всех четырёх вершин произвольного квадрата, но утверждение не доказано, так как при дальнейших вычислениях допущены алгебраические ошибки	4 балла
задача не решена, но показано, как меняется сумма весов вершин квадрата при его параллельном переносе или имеется попытка записать координаты вершин произвольного квадрата, но эти координаты не найдены (найжены с ошибками)	3 балла
рассмотрен только случай квадратов с центром в начале координат или сформулировано, но не доказано утверждение, что сумма весов вершин квадрата равна учетверённому весу его центра	2 балла
рассмотрены только квадраты с диагоналями, параллельными осям координат и/или со сторонами, параллельными осям координат	1 балл
рассмотрено конечное число квадратов	0 баллов

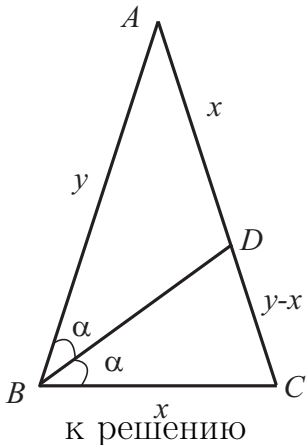
10.4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD . Известно, что $AD = BC$. Докажите, что $BD = BC$.

Решение:



задачи 10.4, первый способ

$BD = AE = AD = BC$, что и требовалось доказать.



задачи 10.4, второй

способ

$l^2 = x^2$, то есть $l = x$, что и требовалось доказать.

Способ 3. Покажем, что условию задачи удовлетворяет равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине. Действительно, если $\angle A = 36^\circ$, то $\angle B = \angle C = 72^\circ$, $\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$ и $\angle BDC = 180^\circ - \angle C - \angle CBD = 72^\circ$. Тогда треугольники ABD и CBD оба равнобедренные (у каждого два равных угла), значит, $AD = DB = BC$. Конечно, в этом случае доказательство утверждения очевидно.

Покажем, что других треугольников, удовлетворяющих условию, нет. Рассмотрим равнобедренные треугольники с постоянным основанием BC . Пусть точка F отрезка AC такова, что $AF = BC$. Как было показано, для треугольника с углами $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ она совпадает с точкой D . При увеличении угла B при основании равнобедренного треугольника увеличивается его боковая сторона AB , поэтому увеличиваются и отношение $\frac{AB}{BC}$ (ведь BC — константа), и равное ему отношение $\frac{AD}{DC}$. С другой стороны, при этом увеличивается длина CF , значит, отношение $\frac{AF}{FC}$ уменьшается. (При уменьшении угла при основании происходит обратное: от-

Способ 1. Проведём через точку D прямую, параллельную основанию треугольника. Пусть она пересекает сторону AB в точке E — см. рисунок. Тогда $\angle EDB = \angle DBC$ (внутренние накрест лежащие). Так как BD — биссектриса, $\angle DBC = \angle DBA$, тогда $\angle EDB = \angle DBA$ и треугольник BDE равнобедренный ($BE = ED$). Так как в трапеции $BEDC$ углы при основании равны, то она равнобедренная $BE = CD$. Итак, $ED = CD$. Кроме того $\angle ACB = \angle ADE$ (соответственные при параллельных DE и BC и секущей DC). Тогда треугольники ADE и BCD равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD = AE$. Остаётся заметить, что треугольник ADE равнобедренный, то есть

Способ 2. Пусть боковая сторона треугольника равна y , основание равно x , угол при основании 2α — см. рисунок. По свойству биссектрисы $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, то есть $\frac{x}{y-x} = \frac{y}{x}$ (*) или $y^2 - xy = x^2$ (**). Пусть $BD = l$. По теореме косинусов для треугольников ADB и CDB имеем систему
$$\begin{cases} x^2 + l^2 - 2xl \cos \alpha = (y-x)^2 \\ y^2 + l^2 - 2yl \cos \alpha = x^2 \end{cases}$$
. Умножив первое уравнение на y , а второе — на x и вычитая одно из другого, получим уравнение $xy(y-x) - l^2(y-x) = x^3 - y(y-x)^2$. Разделив обе части на $y-x$ и учитывая (*), получим $xy - l^2 = x^2 \frac{y}{x} - y(y-x) \Leftrightarrow l^2 = y^2 - xy$. В силу (**)

ношение $\frac{AD}{DC}$ уменьшается, а отношение $\frac{AF}{FC}$ увеличивается). Разность $\frac{AD}{DC} - \frac{AF}{FC}$ монотонно возрастает с ростом угла при основании, значит, обращается в ноль не более одного раза. Остаётся заметить, что она равна нулю, если точки F и D совпадают.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
через параметры исходного треугольника выражены и отрезок AD (CD) и биссектриса BD , но их равенство не показано	6 баллов
верно составлена, но не решена (или решена неверно) система уравнений, из которой выводится доказательство	5 баллов
через параметры исходного треугольника выражена одна из двух величин: отрезок AD (CD), либо биссектриса BD ; или доказано, что все треугольники с данным условием подобны друг другу;	3 балла
рассмотрен случай треугольника с углами 36° , 72° , 72° ; в общем случае решения нет	2 балла
осуществлены дополнительные построения, нужные для решения, хотя решения нет	1 балл
любые алгебраические или геометрические выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

10.5. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеют ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет действительных корней.

Решение:

Способ 1. Парабола — график квадратного трёхчлена — должна касаться одновременно прямых $y = x - 1$ и $y = 2 - 2x$, в частности, лежать целиком в одном из четырёх углов, частей, на которые эти прямые делят плоскость. Это не могут быть углы, смотрящие влево или вправо, так как ось параболы вертикальна. Значит, график лежит либо в верхнем, либо в нижнем углу (и касается его сторон). Но вершина углов — точка пересечения прямых $(1; 0)$ — лежит на оси абсцисс, поэтому парабола ось абсцисс не пересекает.

Способ 2. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Тогда уравнения, которые даны в условии задачи, несложно сводятся к равенствам $ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ и $ax^2 + (b + 2)x + c - 2 = 0$ соответственно. Условие задачи говорит, что дискриминанты трёхчленов, стоящих в левых частях этих уравнений равны нулю, то есть выполнена система
$$\begin{cases} (b - 1)^2 = 4a(c + 1) \\ (b + 2)^2 = 4a(c - 2) \end{cases}$$
. Вычитая из одного уравнения другое, получим после преобразований, что $b = -2a - 0,5$. Подставив это значение

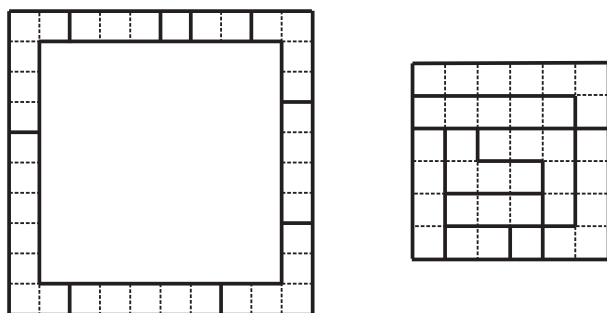
b в любое из уравнений системы, выразим c через a . Получим $c = a + \frac{1}{2} + \frac{9}{16a}$. Тогда $b^2 - 4ac = (2a + 0,5)^2 - 4a^2 - 2a - 2,25 = -2 < 0$, то есть дискриминант квадратного трёхчлена $f(x)$ отрицателен, и сам трёхчлен корней не имеет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
ход доказательства верен, но имеются арифметические ошибки, не влияющие на суть дела	6 баллов
указано, что график трёхчлена должен касаться прямых $y = x - 1$ и $y = 2 - 2x$, но задача не дорешена, так как прямые построены неверно	5 баллов
верно составлена система уравнений, выражающая условие задачи через коэффициенты исходного трёхчлена, но из неё не выведена отрицательность дискриминанта	3 балла
верно проанализировано некоторое бесконечное семейство трёхчленов, напр. все трёхчлены со старшим коэффициентом 1	2 балла
верно построены прямые $y = x - 1$ и $y = 2 - 2x$, при этом из работы не следует, что эти прямые — касательные к графику трёхчлена	1 балл
любые выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

10.6. Оля сделала себе столешницу в виде клетчатого квадрата 10×10 (линии сетки параллельны сторонам квадрата и каждая клетка имеет размер 1×1). Миша лобзиком выпилил в середине квадрат 8×8 (границы квадрата идут по линиям сетки). Оля распилила оставшуюся рамку из 36 клеток по линиям сетки на попарно различные части (не совпадающие наложением) и сложила из них новую столешницу размером 6×6 . Какое максимальное число частей могло у неё получиться? Ответ обосновать.

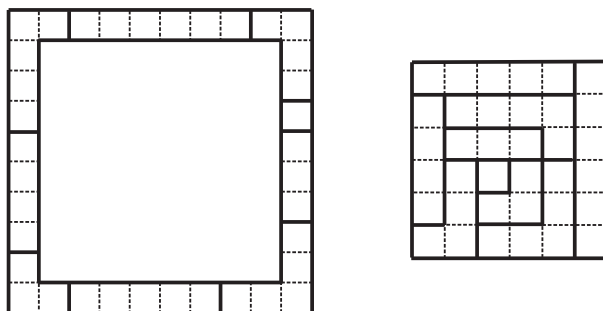
Решение: Получившиеся у Оли части — это либо прямоугольники ширины 1, либо уголки, причём уголков не больше четырёх. Существует только один элемент площади 1 — квадрат размером 1×1 , один элемент площади 2 — прямоугольник



К решению задачи 10.6

1×2 , два элемента площади 3 — прямоугольник и уголок, два элемента площади 4 — прямоугольник и уголок, три элемента площади 5 — прямоугольник и два уголка. Суммарная площадь этих девяти самых маленьких элементов равна 32. Остальные элементы занимают площадь, большую 5, поэтому суммарная площадь любых 10 различных частей не меньше, чем 38. Значит, у Оли могло получиться не более 9 частей. Пример, приведённый на рисунке, показывает, что ровно 9 частей может получиться.

Примечание: Пример для девяти частей не единственный. Даже набор элементов разрезания может быть другим. Например, возможно такое решение.



К решению задачи 10.6

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и полностью обоснованный ответ (имеется и оценка и пример)	7 баллов
есть верная оценка (доказательство, что частей не больше 9) и верный пример разрезания рамки, но отсутствует способ сложения новой столешницы	5 баллов
примера нет, но есть верное доказательство, что частей не может быть больше 9	3 балла
показано, как разрезать рамку на 9 различных частей и как сложить из них новую столешницу	2 балла
приведён верный пример разрезания рамки (на 9 различных частей), но не показано, как из них сложить квадрат	1 балл
примеры, когда частей меньше 9, или среди них есть одинаковые, а также любые не точные оценки (доказательства, что число частей меньше какого-то числа, большего 10)	0 баллов